

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: ABORDAGEM HISTÓRICA

*Taís Alves Silva Ribeiro*¹

RESUMO

O desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral foi a maior realização no campo da matemática no século XVII. Vários matemáticos contribuíram para a consolidação dessa ferramenta, entretanto, atribui-se a Newton e Leibniz a criação do cálculo. A elaboração do presente trabalho tem por objetivo relatar a história do cálculo diferencial e integral desde a Grécia antiga até os dias atuais e para isso foram utilizadas, principalmente, duas importantes obras sobre a história da matemática. A primeira delas trata-se da *Introdução à História da Matemática* do especialista em geometria e história da matemática Howard Eves e a segunda é a *História da Matemática* de Carl B. Boyer.

Palavras-chave: cálculo diferencial e integral, história da matemática, cálculo fracionário e softwares.

ABSTRACT

The development of the Differential and Integral Calculus was the greatest achievement in the field of mathematics in the seventeenth century. Several mathematicians contributed to the consolidation of this tool, however, it's attributed to Newton and Leibniz the creation of calculation. The preparation of this study aims to report the history of differential and integral calculus from Ancient Greece to the present day and it was used mainly two important works on the history of mathematics. The first reference is to the *Introduction to the History of Mathematics* from specialist in geometry and history of mathematics Howard Eves and the second is the *History of Mathematics* by Carl B. Boyer.

Keywords: Differential and integral calculus, history of mathematics, fractional calculus and software

INTRODUÇÃO

O século XVII foi o período de muitos avanços na ciência, principalmente na matemática. Uma das maiores criações nesse ramo foi a invenção do Cálculo Diferencial e Integral por Newton e Leibniz. Entretanto, o desenvolvimento do cálculo foi produto de um trabalho coletivo, envolvendo grandes estudiosos desde a Grécia antiga. A área de aplicação dessa ferramenta matemática é extremamente extensa,

¹ Graduada em Matemática pelo UNISAL- São Joaquim/ Lorena, 2015. Orientador: Prof. Me. Ronaldo Rodrigues Nogueira.

despertando assim o interesse de estudiosos em aperfeiçoar essa técnica desde os tempos remotos.

Diferente de como nos é ensinado atualmente nos cursos de cálculo, a integração surgiu antes da diferenciação. A integral foi criada através de problemas relacionados com comprimentos, áreas e volumes e a diferenciação através dos problemas de tangentes de curvas. Talvez seja por esse motivo a necessidade cotidiana da sociedade, que a integral tenha sido desenvolvida primeiramente, visto que muitas vezes era necessário calcular a área de terrenos com formas irregulares. Muitos anos após a criação da integração e diferenciação foram relacionar ambas como operações inversas.

Até meados do século XVIII, os matemáticos que se dedicaram ao desenvolvimento do cálculo não se preocupavam com seu rigor matemático, mas sim se a técnica funcionava. Entretanto, esta prática levou ao surgimento de muitos absurdos e incoerências na matemática fazendo com que os estudiosos do fim do século XVIII e século XIX se dedicassem a examinar as bases da análise e dar uma forte fundamentação lógica para o cálculo.

O presente trabalho tem por objetivo relatar a história do cálculo diferencial e integral desde o século IV a.c. até os dias atuais. O texto será dividido em itens referentes aos séculos e em cada um deles será descrito a contribuição de cada estudioso no desenvolvimento do cálculo.

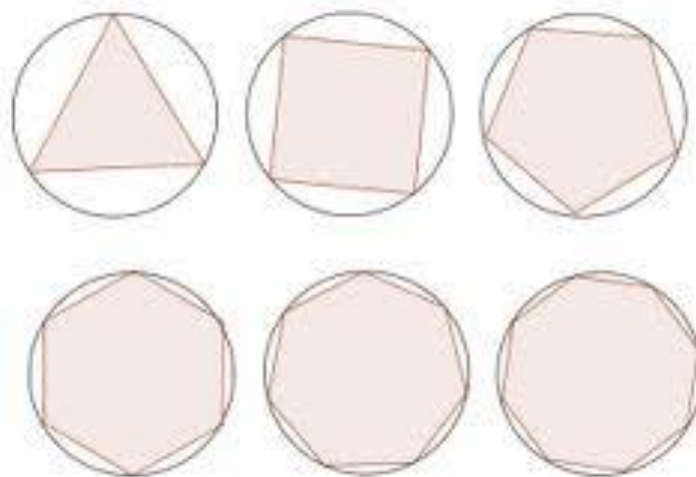
1. SÉCULO IV E III A.C.

1.1. EUDOXO E O MÉTODO DE EXAUSTÃO (370 A.C.)

Segundo EVES (2004) os primeiros problemas da história do cálculo envolvem a determinação do comprimento de arcos e áreas e volumes de figuras irregulares. Para a solução desses problemas, utilizava-se o método de exaustão, comumente atribuído a Eudoxo (370 a.c.). O método consiste em determinar a área em questão (como, por exemplo, a de um círculo) inscrevendo sequências infinitas de polígonos regulares.

Vejamos a imagem demonstrativa:

Figura 1 - Método de exaustão



(FONTE: <http://www.andremachado.org/artigos/541/o-que-sao-integrais.html>)

1.2. ARQUIMEDES E O MÉTODO DE EQUILÍBRIO (287 – 212 A.C.)

“Arquimedes nasceu e morreu em Siracusa. Foi um grande inventor, tendo destaque em matemática, física, astronomia e engenharia, porém sempre esteve mais interessado com o produto de seus pensamentos do que seus engenhos mecânicos”. (BOYER, 1996, p.83).

Em seus estudos desenvolveu o método de equilíbrio para calcular a área ou o volume de regiões irregulares. A ideia fundamental de seu método baseia-se em:

(...) corte a região correspondente num número muito grande de tiras planas ou de fatias paralelas finas e (mentalmente) pendure esses pedaços numa das extremidades de uma alavanca dada, de tal maneira a estabelecer o equilíbrio com uma figura de área ou volume e centroide conhecidos. (EVES, 2004, p. 422).

Com esse método chegou a resultados equivalentes a muitas integrais definidas que estão presentes nos textos elementares de cálculo.

2 - SÉCULO XVI E XVII

2.1. O PRINCÍPIO DE CAVALIERI (1598 – 1647)

Bonaventura Cavalieri nasceu em Milão em 1598. Foi aluno de Galileu e se destacou no ramo da matemática, óptica e astronomia. Trabalhou como professor de matemática da Universidade de Bolonha de 1629 até 1647, ano de sua morte. Dentre

suas obras, a mais importante é o tratado *Geometria Indivisibilibus*, publicado em 1635. Nesse trabalho ele apresenta o método dos indivisíveis, que se assemelha com as ideias desenvolvidas por Arquimedes para o cálculo de áreas e volumes, contribuindo também para o avanço da integração (EVES, 2004).

Para Cavalieri (2004), a parte indivisível de uma figura plana é uma corda e de um sólido é uma secção do mesmo. De acordo com ele, se tivermos uma figura conhecida, em que podemos calcular a sua área, e dividi-la em cordas, após movimentar essas cordas a fim de formar uma figura irregular a área desta última permanece igual à da figura inicial. O mesmo acontece com o volume de sólidos.

A partir dessas teorias surgiram os chamados princípios de Cavalieri:

- Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.
- Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante. (EVES, 2004, p. 426)

2.2. JOHN WALLIS (1616- 1703)

John Wallis nasceu em 1616 na Inglaterra e morreu em 1703. Teve seu primeiro contato com matemática quando seu irmão lhe ensinou as regras da aritmética. Wallis foi um dos primeiros a discutir as cônicas como curvas de segundo grau, em vez de considerá-las como secções de um cone.

Contribuiu para o cálculo através do seu livro *Arithmetica infinitorum*, onde Wallis substituiu o modelo geométrico de Cavalieri pela aritmética. Dessa forma, estimulou o estudo de outros matemáticos pela expansão em série como um meio de integração. Esse livro influenciou os estudos de Isaac Newton que deu continuidade às pesquisas de Wallis, obtendo como um dos seus primeiros êxitos a resolução da quadratura do círculo na forma de uma série infinita. (EVES, 2004).

2.3. ISAAC BARROW (1630 – 1677)

Isaac Barrow nasceu em Londres em 1630 e morreu em 1677 após contrair febre maligna. Seus primeiros anos na escola ficou famoso por ser um péssimo aluno. O

trabalho matemático mais importante de Barrow é *Lectione Geometricae* publicado em 1670 que trata sobre tangentes. Esse trabalho foi revisado mais tarde por Newton e contribuiu para o desenvolvimento do cálculo diferencial. (EVES, 2004).

2.4. ISAAC NEWTON (1642 – 1727)

Isaac Newton nasceu no interior da Inglaterra no ano de 1642. Quando jovem revelou grande habilidade para projetar miniaturas mecânicas engenhosas. Quando estava na Universidade de Cambridge teve contato com um livro de astrologia o que despertou nele o interesse pela matemática. Após ler vários livros passou a criar sua própria matemática, primeiro descobrindo o teorema do binômio generalizado, depois inventando o método dos fluxos que corresponde ao atual cálculo diferencial.

O método dos fluxos foi escrito em 1671, porém só foi publicado em 1736. Nesse trabalho, considerava-se que uma curva era gerada a partir do movimento de um ponto. Partindo dessa suposição as coordenadas desse ponto passam a ser variáveis. À variável Newton denominou fluente e a sua taxa de variação chamou de fluxo. Ao relacionar os fluentes com seus fluxos chega-se ao que hoje chamamos de diferenciação. (EVES, 2004)

Apesar de Newton não ter sido o primeiro a usar a diferenciação e integração, o seu legado ao cálculo foi ter consolidado um algoritmo geral aplicável a todas as funções, sejam algébricas ou transcendentais (BOYER, 1996).

2.5. LEIBNIZ (1646 – 1716)

Gottfried Wilhelm Leibniz nasceu na Alemanha em 1646 e é considerado o último gênio universal por dominar assuntos relacionados a matemática, filosofia e teologia quando tinha apenas doze anos. Durante sua vida esteve sempre envolvido com o serviço diplomático.

Leibniz desenvolveu seus estudos sobre o cálculo entre 1673 e 1676 elucidando ideias sobre o teorema fundamental do cálculo e estabelecendo muitas das fórmulas elementares de diferenciação. Usou pela primeira vez o símbolo \int para integral em 1675. Esse símbolo derivou da primeira letra da palavra soma. Seu primeiro artigo sobre integrais é datado em 1684 (EVES, 2004).

A criação do cálculo alimentou uma grande polêmica durante muitos anos entre Newton e Leibniz. Os estudos de Newton são anteriores aos de Leibniz, entretanto este foi quem primeiro publicou seus resultados. Atualmente, acredita-se que ambos desenvolveram suas pesquisas independentemente.

3 - SÉCULO XVIII

3.1. FAMÍLIA BERNOULLI

Com um número surpreendente de matemáticos e cientistas entre seus membros, a família Bernoulli, da Suíça, ocupa lugar de destaque na história da ciência. Os primeiros matemáticos notáveis dessa família são os irmãos Jakob Bernoulli (1654-1705) e Johann Bernoulli (1667-1748). Ambos se interessaram pela matemática a partir dos artigos publicados por Leibniz na *Acta eruditorum*. Jakob e Johann estavam entre os primeiros estudiosos que perceberam a potência espantosa do cálculo e que aplicaram esse instrumento a uma gama ampla de problemas. De 1687 até sua morte, Jakob ocupou a cadeira de matemática da Universidade de Basileia. Johann tornou-se professor da Universidade de Groningen em 1697 e, com a morte do irmão, em 1705, sucedeu-o na Universidade da Basileia, onde ficou pelo resto de seus dias (EVES, 2004).

A palavra integral ligada ao cálculo aparece pela primeira vez na resolução do problema da curva isócrona (ou curva ao longo da qual um corpo cairá com velocidade vertical uniforme) publicada por Jakob na *Acta eruditorum* em 1690. Leibniz chamava o cálculo integral de cálculo *summatorius*. Atribui-se também a Jakob a equação de Bernoulli, usada em equações diferenciais (EVES, 2004).

Johann Bernoulli teve papel importante na história do cálculo divulgando na Europa as potencialidades dessa nova ferramenta matemática. Foi através de materiais fornecidos por Johann a L' Hospital (1661 – 1704) que este publicou o primeiro texto sobre cálculo. Além do seu envolvimento com o cálculo, Johann contribuiu enormemente para outros campos da matemática.

3.2. EULER (1707 - 1783)

Leonard Euler nasceu em 1707 em Basiléia. Tentou carreira no campo da teologia, entretanto, foi encontrar sua vocação na matemática. Foi membro da Academia de São Petersburgo, Universidade da Basiléia e chefe da Universidade de Berlim.

Euler contribuiu de forma significativa para a matemática e em relação ao cálculo atribui-se a ele as funções Beta e Gama do cálculo avançado, equação diferencial de Euler, a ideia de fator integrante na resolução de equações diferenciais, o método sistemático usado hoje para resolver equações diferenciais lineares com coeficientes constantes e distinguiu entre equações diferenciais lineares homogêneas e não homogêneas.

Em vida, Euler publicou 530 trabalhos e deixou ainda, antes de morrer em 1783, uma série de manuscritos que enriqueceram as publicações da Academia de São Petersburgo. Não há ramo da matemática em que seu nome não apareça (EVES, 2004).

3.3. LAGRANGE (1736 – 1813)

Outro grande matemático do século XVIII foi Joseph Louis Lagrange que nasceu em Turim e muito jovem tornou-se professor de matemática da academia militar local, posteriormente, tendo se transferido para a Escola Politécnica de Paris.

Lagrange foi um dos primeiros matemáticos a se preocupar com o estado insatisfatório dos fundamentos da análise no desenvolvimento do cálculo, por isso, seu trabalho teve grande influência nas pesquisas matemáticas subsequentes, apesar de não ter chegado a resultados de sucesso.

Além de ter dado o passo inicial para a construção do rigor necessário para a base cálculo, Lagrange introduziu a notação $f'(x)$ usada para indicar a derivada de uma função. O matemático se destacou também com seu trabalho em equações diferenciais parciais e no cálculo de variações impulsionando o desenvolvimento desse campo (EVES, 2004).

3.4. LAPLACE (1749 – 1827)

De família humilde Pierre-Simon Laplace nasceu em 1749. Seu talento matemático logo lhe abriu as portas de boas posições no ensino. Produziu trabalhos nas áreas de mecânica celeste, probabilidade, equações diferenciais e geodesia. Sua maior

contribuição para o cálculo é a chamada transformada de Laplace, que consiste em um método que transforma uma equação diferencial com condições iniciais em uma equação algébrica. Este trabalho, posteriormente, tornou-se a chave do cálculo operacional de Heaviside (EVES, 2004).

4 - SÉCULO XIX

Os estudiosos do século XIX que dedicaram parte de suas pesquisas ao cálculo diferencial e integral preocuparam-se em dar embasamento sólido a esse campo.

Como já mencionado, Lagrange foi um dos primeiros a dedicar seu trabalho ao rigor matemático, o que motivou outros estudiosos a seguirem o mesmo caminho. A exemplo, podemos citar Mary Fairfax Somerville (1780 – 1872) que foi uma autodidata escocesa que publicou a obra *A Preliminary Dissertation on the Mechanisms of the Heavens*, em 1832, contendo o embasamento matemático necessário da difícil obra de Laplace.

O francês Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857) foi um dos matemáticos que aprofundou consideravelmente os estudos de Lagrange e Gauss com o objetivo de imprimir o rigor à análise. Cauchy possui 789 artigos publicados abrangendo temas como convergência e divergência de séries infinitas, teoria das funções reais e complexas, equações diferenciais e probabilidade. Cauchy definiu a derivada de $y = f(x)$ em relação a x como o limite, quando $\Delta x \rightarrow 0$, da razão: (EVES, 2004)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Além dos pesquisadores citados, o século XIX teve outros matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento do cálculo, assim como Karl Wilhelm Theodor Weierstrass e Goerg Friedrich Bernard Riemann.

5 - SÉCULO XX

Trataremos do século XX sob dois aspectos marcantes, o primeiro sendo o cálculo diferencial e integral fracionário e o segundo a era digital e suas contribuições para o cálculo.

5.1. O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL FRACIONÁRIO

Define-se como cálculo fracionário, ou cálculo de ordem não inteira, derivadas e integrais que assumem ordens arbitrárias. Esse cálculo é tão antigo quanto o cálculo de ordem inteira, entretanto por ter interpretações físicas e geométricas complexas o cálculo fracionário não foi difundido da mesma forma como foi o cálculo tradicional.

A primeira evidência sobre especulações a respeito da teoria do cálculo fracionário é datada em 30 de setembro de 1695 em uma carta de l'Hospital a Leibniz perguntando se é possível estender o conceito de uma derivada de ordem inteira $\frac{d^n y}{dx^n}$ quando o n fosse igual a $\frac{1}{2}$. Leibniz, em sua resposta afirmativa, concluiu que este é um aparente paradoxo do qual um dia importantes aplicações serão obtidas. (CAMARGO, 2009). Atualmente, sabe-se que n pode também assumir valores irracionais e complexos.

Trataremos neste trabalho o cálculo fracionário como pertencente ao século XX, pois o seu maior desenvolvimento e descoberta de duas aplicações foram feitas durante esse século, mas brilhantes matemáticos dos séculos anteriores fizeram importantes contribuições para essa nova teoria como, por exemplo, Wallis, Euler, Lagrange, Lacroix, Laplace e Fourier.

Atribui-se a Abel a primeira aplicação do cálculo fracionário, usado para a resolução de uma equação integral do problema da tautócrona, que consiste na determinação da equação da trajetória percorrida por uma partícula que desliza sob ação da gravidade de uma curva sem atrito, de modo que o tempo de descida seja independente do ponto de partida.

Atualmente, a teoria de cálculo fracionário vem sendo amplamente usado em modelagens de problemas relacionados com Ciência e Engenharia como, por exemplo, processamento de sinais, redes elétricas, mecânica dos fluidos, viscoelasticidade, biologia matemática, economia e teoria de controle. O principal motivo para o uso do cálculo fracionário é a sua maior precisão na modelagem de um fenômeno físico, porém sua complexidade analítica e numérica é maior se comparada com o cálculo tradicional.

5.2. TECNOLOGIA E O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Com o advento da tecnologia no século XX, foi possível facilitar as resoluções e análises de problemas que envolvem o cálculo. Esse avanço iniciou-se com as calculadoras mais sofisticadas que traziam funções científicas como a HP-35, lançada em 1972. Atualmente, temos calculadoras que apresentam gráficos de funções no display, como a HP-50g.

Além das calculadoras científicas é importante destacar o desenvolvimento de softwares voltados para matemática e para o ensino da mesma. Citaremos aqui alguns dos mais conhecidos softwares usados e apresentaremos as suas principais características.

- Maxima

Versão Atual: 5.37.0 (17 de agosto de 2015)

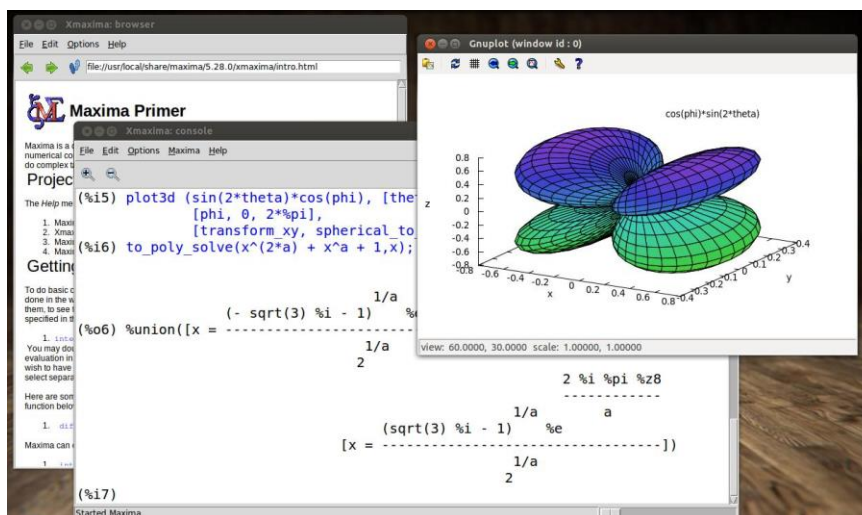
Site Oficial: maxima.sourceforge.net

Sistemas Operacionais Compatíveis: Windows, Mac e Linux

Licenciamento: Gratuito e com código aberto

Principais funções: Manipulação de expressões numéricas e simbólicas, integração, diferenciação, séries de Taylor, transformações de Laplace, equações diferenciais, sistemas de equações, equações polinomiais, vetores e matrizes.

Figura 2 – Interface Maxima



(FONTE: <http://linux.softpedia.com/get/Science-and-Engineering/Mathematics/Maxima-35060.shtml>)

- GeoGebra

Versão Atual: 5.0

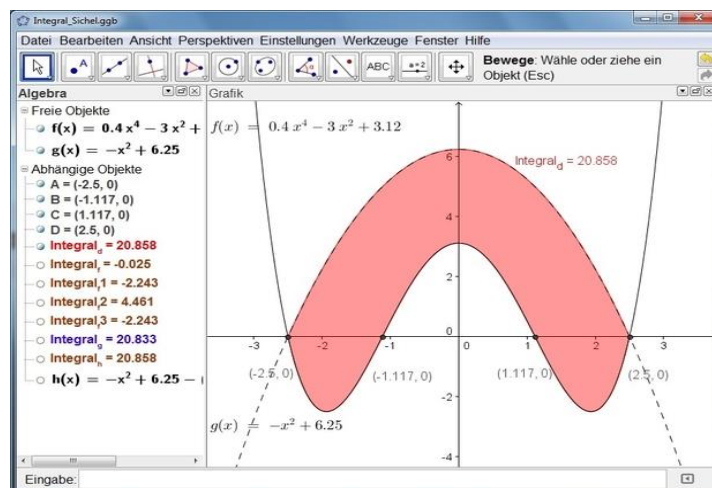
Site Oficial: www.geogebra.org

Sistemas Operacionais Compatíveis: Windows, Mac, Linux, iPad e Android

Licenciamento: Gratuito (sem código aberto)

Principais funções: Geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo (integral e diferencial)

Figura 3 – Interface GeoGebra



(FONTE: <http://www.milzners.de/mathematik.htm>)

- Winplot

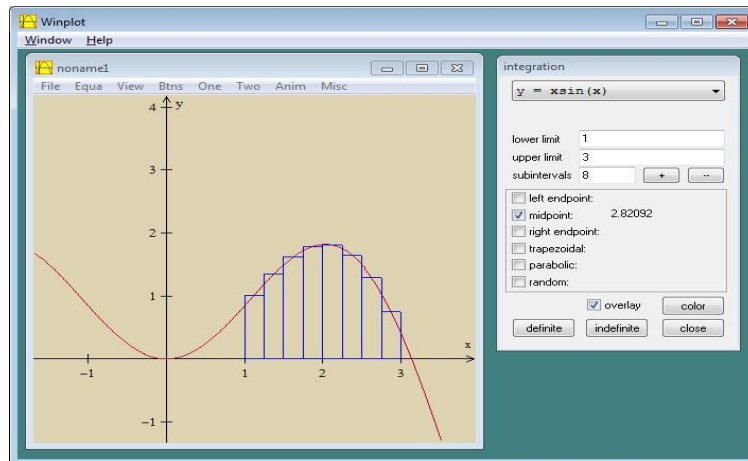
Site Oficial: math.exeter.edu/rparris/winplot.html

Sistemas Operacionais Compatíveis: Windows

Licenciamento: Gratuito porém sem código aberto.

Principais funções: Diferenciação, equações, inequações e integração.

Figura 4 – Interface Winplot



(Fonte: <http://math.exeter.edu/rparris/images/wpscreen04.jpg>)

- Wolfram Alpha Pro

Site Oficial: www.wolframalpha.com/pro

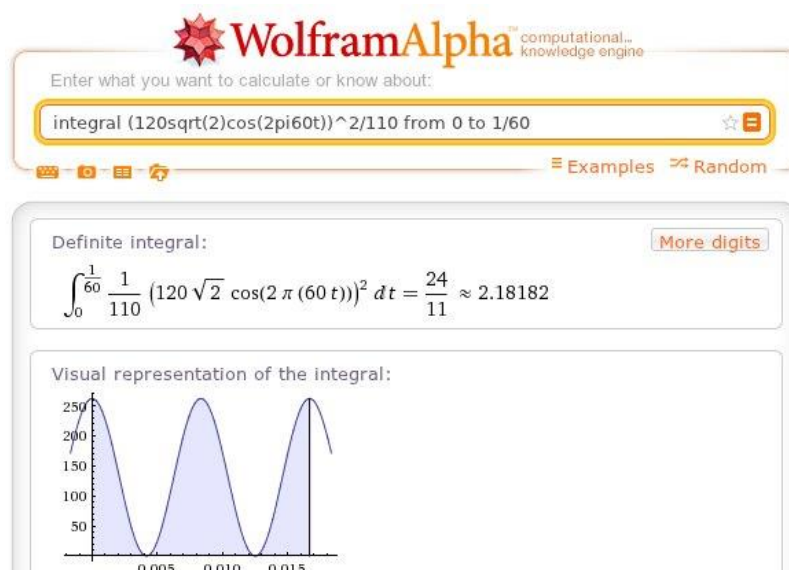
Sistemas Operacionais Compatíveis: Acesso web para qualquer plataforma desktop ou móvel.

Licenciamento: Pago

Versão de Demonstração: Sim, com recursos limitados

Principais funções: matemática elementar, matemática discreta, funções, álgebra, integração, diferenciação, geometria e matemática avançada.

Figura 5 – Interface Wolfram Alpha



(FONTE: <http://shallowsky.com/blog/images/screenshots/wolfram-integration.jpg>)

CONCLUSÃO

O estudo da forma como foi construído a teoria do cálculo integral e diferencial atrelado ao uso de softwares para uma melhor visualização de problemas mais complexos pode resultar em um aprendizado significativo. Desta forma, aprende-se o raciocínio envolvido ao invés de um aprendizado mecanizado onde apenas aplica-se fórmulas sem entender o contexto. Entretanto, esse método não se restringe apenas ao estudo do cálculo, mas também a qualquer área do conhecimento bem como qualquer nível de educação, do ensino básico ao superior.

REFERÊNCIAS

- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2. Ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher LTDA, 1996. p. 496.
- CAMARGO, R. F. **Cálculo Fracionário e Aplicações**. 2009. 135 f. Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2009. Disponível em <<http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=000439359>>. Acesso em 21 de agosto de 2015.
- EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004. P. 844.
- MACHADO, André. Disponível em <<http://www.andremachado.org/artigos/541/o-que-sao-integrais.html>>. Acesso em 30 de agosto de 2015.
- MILZNER. Disponível em <<http://www.milzners.de/mathematik.htm>>. Acesso em 15 de setembro de 2015.
- NUMERIC INTEGRATION TRICKS. Disponível em <<http://shallowky.com/blog/science/numeric-integration.html> >. Acesso em 15 de setembro de 2015.
- SOFTPEDIA. Disponível em <<http://linux.softpedia.com/get/Science-and-Engineering/Mathematics/Maxima-35060.shtml>>. Acesso em 15 de setembro de 2015.
- WINPLOT. Disponível em <<http://math.exeter.edu/rparris/images/wpscreen04.jpg>>. Acesso em 15 de setembro de 2015.